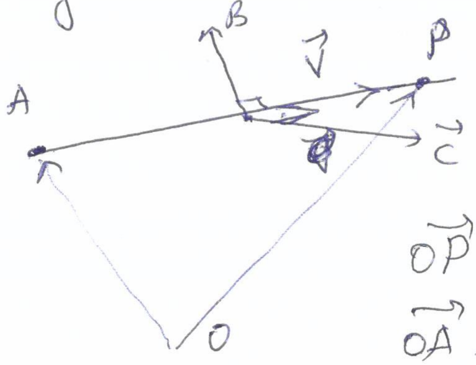
1) $B = j - k$ ve $\vec{C} = i - j$ vek. ~~dik~~ oluşturduğu düzleme dik olacağından düzlemin üzerinde olan $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerine de dik olacaktır. O halde doğru doğrultu vektörü $\vec{V} = \vec{B} \times \vec{C}$ olur.



$\vec{OP} = \cancel{\vec{AP}}\ \vec{OA} + t\vec{V}$ olur.

vektörel denklemi

$\vec{OP} = (x, y, z)$

$\vec{OA} = (1, 2, 3)$

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -1, -1)$$

$(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(-1, -1, -1)$

$x = 1 - t$, $y = 2 - t$, $z = 3 - t$ parametrik denk.

$x - 1 = -t$, $y - 2 = -t$, $z - 3 = -t \Rightarrow x - 1 = y - 2 = z - 3$ kartezyen denklemi

3) $A = -i + k$, $B = j - k$, $C = i - j + k$ vek. üzerine kurulan paralel yüzlü cismin hacmi

$$V = \det(A, B, C) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$= 0 - 1 = -1 \quad V = |-1| = 1$

4) $\vec{R}(t) = t^2(\cos t\, i + \sin t\, j)$ olduğundan hız vektörü

$V(t) = (2t\cos t - t^2\sin t)i + (2t\sin t + t^2\cos t)j$ dir.

$t = \pi/2$ deki hızı ise

$$V(\pi/2) = \sqrt{\Big(2\cdot\pi/2\cdot\underbrace{\cos\pi/2}_{=0} - \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2\underbrace{\sin\pi/2}_{=1}\Big)^2 + \Big(2\tfrac{\pi}{2}\underbrace{\sin\pi/2}_{=1} + \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2\cdot\underbrace{\cos\pi/2}_{=0}\Big)^2}$$

$$= \sqrt{\left[\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)^2\right]^2 + \left(2\tfrac{\pi}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2\left(\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2+4\right)} = \tfrac{\pi}{2}\sqrt{\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2+4}$$

5) $\vec{u} = \dfrac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{1+1+4}}(i+j-2k) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(i+j-2k)$

olmak üzere

$$\left.\frac{df(P)}{dP}\right|_{P=A} = u_1\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_A + u_2\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_A + u_3\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_A$$

$f(x,y,z) = 2x^2 + xy - yz^2$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x + y$ $\quad \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{A(-1,1,-2)} = 4\cdot(-1)+1 = -3$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = x - z^2$ $\quad \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{A(-1,1,-2)} = -1-(-2)^2 = -5$

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = -2yz$ $\quad \left.\dfrac{\partial f}{\partial z}\right|_{A(-1,1,-2)} = -2\cdot1\cdot(-2) = 4$

$$\left.\frac{df(P)}{dP}\right|_{P=A} = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot(-3) + \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot(-5) + \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\cdot 4 = \frac{-3-5-8}{\sqrt{6}} = -\frac{16}{\sqrt{6}}$$

b) $\vec{u}$ ile $\vec{\nabla} f(P) = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$ arasındaki açı θ olmak üzere P_0 noktasındaki ve $\vec{u}$ birim vektörü yönündeki türev

$$\left.\frac{df(P)}{dP}\right|_{P=P_0} = \left.\langle \vec{\nabla} f(P), \vec{u} \rangle\right|_{P=P_0} = \left.\|\vec{\nabla} f(P)\| \, \|\vec{u}\|\right|_{P=P_0} \cdot \cos\theta$$

$\|\vec{u}\| = 1$ old. dan $\left.\frac{df(P)}{dP}\right|_{P=P_0} = \left\|\left.\vec{\nabla} f(P)\right|_{P=P_0}\right\| \cdot \cos\theta$

olur. Bunun en büyük değer olması için $\cos\theta = 1$ yani $\theta = 0$ olmalıdır. O halde $\theta = 0$ olması $\vec{u}$ ile $\vec{\nabla} f(P)$ vektörlerin paralel yani aynı doğrultuda (yönde) olması gerekir.

O halde $f(x,y,z) = 3x + \sin(xy) + z^2$

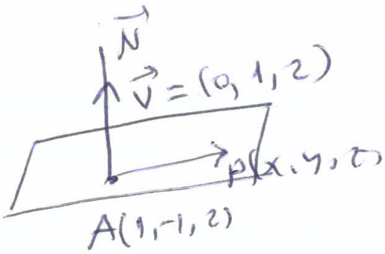
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{A(1,0,-1)} = \left.(3 + y\cos xy)\right|_{A(1,0,-1)} = 3 + 0.\cos xy = 3$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{A} = \left.(x\cos xy)\right|_{A} = 1.\cos(1.0) = 1$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{A} = \left.2z\right|_{A} = 2.(-1) = -2$$

f nin $A(1,0,-1)$ nok. $\vec{\nabla} f(A) = 3.i + j - 2k$ yönündeki türevi maksimum olur.

7)



$\overrightarrow{OP} = i+j+t(j+2k)$ doğrusuna düzlem dik olduğundan doğrunun doğrultman vektörü düzlemin normal vektörü olur. Yani $\vec{N}=\vec{V}=j+2k$ olur. Düzlem üzerinde bir başka iki nokta $B(b_1,b_2,b_3)$ ve $C(c_1,c_2,c_3)$ olsun. $P(x,y,z)$ temsili bir nokta olmak üzere

$\det(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=0 \Rightarrow \overrightarrow{AP}=u\overrightarrow{AB}+v\overrightarrow{AC}$ düzlemin vektörel denklemidir. Diğer taraftan düzlemin normali düzlem üzerindeki bütün vektörlere dik olduğundan $\langle \vec{N},\overrightarrow{AB}\rangle=0$, $\langle \vec{N},\overrightarrow{AC}\rangle=0$ olur. Buradan

$\langle (0,1,2),(b_1-1,b_2+1,b_3-2)\rangle=0 \Rightarrow b_2+1+2b_3-4=0 \Rightarrow b_2+2b_3=3$

Özel olarak $b_3=0$, $b_2=3$, $b_1=2$ alınırsa $\underline{B(2,3,0)}$ olur.

$\langle (0,1,2),(c_1-1,c_2+1,c_3-2)\rangle=0 \Rightarrow c_2+1+2c_3-4=0 \Rightarrow c_2+2c_3=3$

Özel olarak $c_3=1$ alınırsa $c_2=1$, olur $c_1=-1$ alınabilir.

$C(-1,1,1)$ olur. Böylece $\overrightarrow{AP}=u\overrightarrow{AB}+v\overrightarrow{AC}$ vek. denk. de

$(x-1,\ y+1,\ z-2)=u(1,4,-2)+v(-2,2,-1)$

$x-1=u-2v \quad y+1=4u+2v,\ z-2=-2u-v$

$x=1+u-2v,\ y=-1+4u+2v,\ z=2-2u-v$ düzlemin parametrik denk. Kartezyen denklemini u ve v parametresinin yok edilmesi ile yani $\underline{y+1=4u+2v}$, $z-2=-2u-v$ ifadesini -2 ile çarparsak

$\underline{-2z+4=4u+2v}$ olur. Diğer taraftan $y+1=4u+2v$ den sağ tarafları eşit old. dan sol tarafları da eşit olur. Yani

$-2z+4=y+1 \Rightarrow y+2z-3=0$ bulunur. Düzlemin karteyzen denk. olur. (Diğer taraftan karteyzen denk. kısaca $\langle \vec{N},\overrightarrow{AP}\rangle=0$ dan. $\langle(0,1,2),(x-1,y+1,z-2)\rangle=0 \Rightarrow 0.(x-1)+1.(y+1)+2(z-2)=0$

2) Doğrusal olmayan üç noktadan bir tek düzlem geçtiğinden A, B ve C şeklinde üç nokta alalım. Düzlemi oluşturacak nokta ise P olsun. O halde $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ ve $\vec{AP}$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzlü cismin hacmi sıfır olmalıdır. Yani bu üç vektör aynı düzlem üzerinde olması için hacim sıfır olmalıdır. Bu üç vektör üzerine kurulan paralel yüzlü cismin hacmi $V = \langle \vec{AB} \times \vec{AC}, \vec{AP} \rangle$ (veya $V = \det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AP})$) old. dan düzlemin vektörel denklemi $\underline{\langle \vec{AB} \times \vec{AC}, \vec{AP} \rangle = 0}$ veya $\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AP}) = 0$ olur. Parametrik denklem bu vektörel denklemden elde edilmelidir.

$\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AP}) = 0$ ise bu üç vektör lineer bağımlıdır. Yani $\vec{AP} = u\vec{AB} + v\vec{AC}$ olacak şekilde şekilde u ve v parametreleri vardır. Burada

$$\left.\begin{aligned} \vec{AB} &= (b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3) \\ \vec{AC} &= (c_1-a_1, c_2-a_2, c_3-a_3) \\ \vec{AP} &= (x-a_1, y-a_2, z-a_3) \end{aligned}\right\}$$

olmak üzere $\vec{AP} = u\vec{AB} + v\vec{AC}$ den

$$x - a_1 = u(b_1-a_1) + v(c_1-a_1)$$
$$y - a_2 = u(b_2-a_2) + v(c_2-a_2)$$
$$z - a_3 = u(b_3-a_3) + v(c_3-a_3)$$

şeklinde düzlemin parametrik denklemi elde edilir.

$x-a_1 = X$, $y-a_2 = Y$, $z-a_3 = Z$, $b_i - a_i = k_i$, $c_i - a_i = t_i$ $i=1,2,3$ alınırsa

$$\left.\begin{aligned} X &= uk_1 + vt_1 \\ Y &= uk_2 + vt_2 \\ Z &= uk_3 + vt_3 \end{aligned}\right\} \text{olur.}$$

$u = \dfrac{t_2X - t_1Y}{k_1t_2 - k_2t_1}$, $v = \dfrac{k_2X - k_1Y}{t_1k_2 - t_2k_1}$ bulur. $Z = uk_3 + vt_3$ de yerine yazarsak ve düzenlersek

$$(k_1t_2 - k_2t_1)Z = (t_2X - t_1Y)k_3 - (k_2X - k_1Y)t_3$$

olur. Buradan

$$(\underbrace{k_2t_3 - k_3t_2}_{n_1})\underset{x-a_1}{X} + (\underbrace{k_3t_1 - k_1t_3}_{n_2})\underset{y-a_2}{Y} + (\underbrace{k_1t_2 - k_2t_1}_{n_3})\underset{z-a_3}{Z} = 0$$

[illegible] $(n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3)$ dir.